

[専門科目 (物理学)] (全2題)

[問題1] 以下の文章を読み, 問 A ~ F に答えよ. 解答用紙には導出過程も記述すること.

光が偏光板を通過する実験を考える. 図1に示すように, 直交座標系において入射光は xy 平面を x 軸から反時計回りに角度 θ 回転した方向に偏光しており, $-z$ 方向に進む. ここで, x 軸および y 軸に平行に偏光した光を表す基底を, それぞれ $|x\rangle$ および $|y\rangle$ とし, これらは正規直交系をなす. 図1に示した光の偏光状態 $|\psi_\theta\rangle$ はこれらの基底を用いて以下のように表せる.

$$|\psi_\theta\rangle = \cos\theta |x\rangle + \sin\theta |y\rangle \quad (1)$$

さらに, xy 平面において x 軸から反時計回りに角度 ϕ 回転した方向に透過軸を有する偏光板を z 軸に垂直に配置する. ここで, $\phi = \pi/2$ に透過軸を有する偏光板 ($\pi/2$ 偏光板) は演算子 $\hat{P}_{\pi/2}$ で以下のように記述できる. (2)

$$\hat{P}_{\pi/2} = |y\rangle\langle y|$$

状態 $|\psi_\theta\rangle$ の入射光に対する, $\pi/2$ 偏光板を通過した後の光の透過率 P を以下に定義する.

$$P = |\langle y|\hat{P}_{\pi/2}|\psi_\theta\rangle|^2 \quad (3)$$

式(1)および(2)を用いると, 透過率は となる.

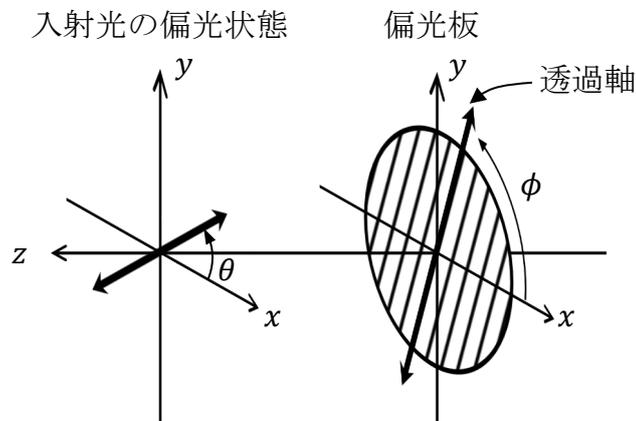


図1 入射光の偏光状態と偏光板の配置.

- 問 A 空欄 ア に入る適切な数式を θ を用いて答えよ.
- 問 B $\phi = \pi/4$ に透過軸を有する偏光板 ($\pi/4$ 偏光板) の演算子 $\hat{P}_{\pi/4}$ を, $|x\rangle$ および $|y\rangle$ を基底として記述せよ.
- 問 C 光路上に $\pi/4$ 偏光板および $\pi/2$ 偏光板を配置する. x 軸方向に偏光した光を入射し, $\pi/4$ 偏光板, $\pi/2$ 偏光板の順に通過させる. 最初の入射光に対する, 2 番目の偏光板を通過した後の光の透過率を求めよ.
- 問 D x 軸方向に偏光した光を入射し, 3 枚の偏光板を通過する場合を考える. 光が最初に通過する偏光板およびその次に通過する偏光板はそれぞれ $\phi = \pi/6$ および $\phi = \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq \pi/2$) に透過軸を有する. 最後に, $\pi/2$ 偏光板を通過する. 最初の入射光に対する, 最後の偏光板を通過した後の光の透過率が最大および最小となる α をそれぞれ求めよ.
- 問 E 図 2 に示すように, 平行に並んだ N 個の偏光板に x 軸方向に偏光した光を入射する実験を行う. 光が最初に入射する偏光板の透過軸の向きは $\phi = \gamma/N$ である. 隣りあう偏光板の透過軸は γ/N ずつ同一方向に回転しており, N 番目の偏光板の透過軸の向きは $\phi = \gamma$ である. 最初の入射光に対する, N 番目の偏光板を通過した後の光の透過率を N と γ を用いて表せ.
- 問 F 問 E の実験系において, 最初の入射光に対する N 番目の偏光板を通過した後の光の透過率を, $\gamma = \pi/2$ および $N \rightarrow \infty$ とした場合について数値で答えよ.

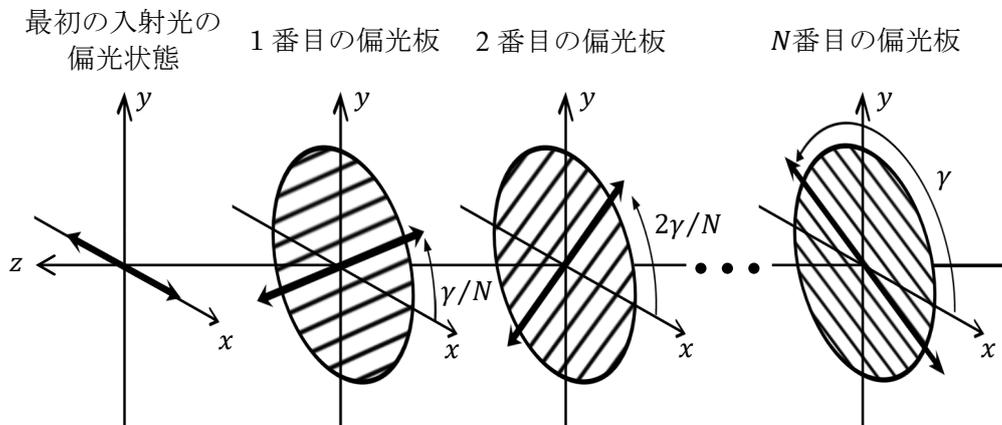


図 2 平行に並んだ N 個の偏光板に光を入射する実験の配置.

[問題2] 以下の文章を読み, 問 A ~ G に答えよ. 解答用紙には導出過程も記述すること. 必要ならば以下の積分公式を用いよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-\alpha x^2) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (1)$$

質量 m の粒子の一次元の古典的な系 (運動量 p および位置 x) を考察する. 粒子は熱浴に接しカノニカル分布をしている. 調和型ポテンシャルの系の分布関数を, 変分パラメータ L を含む箱型ポテンシャルの系の分布関数で近似的に表す.

調和型ポテンシャル (振動数 ω) の系のエネルギー $E(p, x)$ は以下のように表せる.

$$E(p, x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad (2)$$

また, 箱型ポテンシャルの系のエネルギー $E_0(p, x; L)$ は以下のように表せる.

$$E_0(p, x; L) = \frac{p^2}{2m} + V_0(x, L) \quad (3)$$

$$V_0(x, L) = \begin{cases} 0 & (-L \leq x \leq L) \\ \infty & (x < -L, x > L) \end{cases}$$

ここで, 変分パラメータ L で決まる箱の長さ $2L > 0$ を変化させ, 調和型ポテンシャルの系の分布関数を最も良く近似する箱型ポテンシャルの系の分布関数を, 以下で説明する変分法を用いて決定する.

まず, パラメータ λ を用いて調和型ポテンシャルの系と箱型ポテンシャルの系をつなぐエネルギー $E_\lambda(p, x; L)$ を以下のように定義する.

$$E_\lambda(p, x; L) = E_0(p, x; L) + \lambda \Delta E(p, x; L) \quad (4)$$

$$\Delta E(p, x; L) = E(p, x) - E_0(p, x; L) \quad (5)$$

ここで, 調和型ポテンシャルの系のエネルギーは $E(p, x) = E_{\lambda=1}(p, x; L)$, 箱型ポテンシャルの系のエネルギーは $E_0(p, x; L) = E_{\lambda=0}(p, x; L)$ である. また, Helmholtz エネルギー F_λ は, 分配関数 Z_λ を用いて,

$$F_\lambda = \boxed{\text{ア}} \quad (6)$$

$$Z_\lambda = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-\frac{E_\lambda(p, x; L)}{k_B T}\right) \quad (7)$$

となる。ここで、 h は Planck 定数、 k_B は Boltzmann 定数である。

F_λ を λ で一階微分すると、

$$\frac{dF_\lambda}{d\lambda} = \frac{\frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dx \Delta E(p, x; L) \exp\left(-\frac{E_\lambda(p, x; L)}{k_B T}\right)}{Z_\lambda} = \langle \Delta E(p, x; L) \rangle_\lambda \quad (8)$$

となる。ここで $\langle \rangle_\lambda$ は分配関数 Z_λ による熱平均を表す。また二階微分は、

$$\frac{d^2 F_\lambda}{d\lambda^2} = \boxed{\text{イ}} \leq 0 \quad (9)$$

であり、 F_λ は λ の関数として λ のいたるところで上に凸である。従って、 F_λ を

$\lambda = 0$ での接線 $F_0 + \lambda \cdot \left. \frac{dF_\lambda}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}$ と比較すると λ のいたるところで、

$$F_\lambda \quad \boxed{\text{ウ}} \quad F_0 + \lambda \cdot \left. \frac{dF_\lambda}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} \quad (10)$$

である。特に、 $\lambda = 1$ のとき、

$$F_1 \quad \boxed{\text{ウ}} \quad F_0(L) + \langle \Delta E(x, p; L) \rangle_0 \quad (11)$$

となる。したがって、変分パラメータ L は、式 (11) の右辺が $\boxed{\text{エ}}$ になる
とき最も F_1 に近づくため、最適な値となる。

箱型ポテンシャルの系の分配関数 $Z_0(L)$ は、

$$Z_0(L) = \boxed{\text{オ}} \quad (12)$$

であり、式 (11) の右辺第二項は、次式で表される。

$$\langle \Delta E(x, p; L) \rangle_0 = \boxed{\text{カ}} \quad (13)$$

したがって、最適な箱の長さ $2\tilde{L}$ は、次式となる。

$$2\tilde{L} = \boxed{\text{キ}} \quad (14)$$

問 A 空欄 に入る適切な式を, k_B , T , Z_λ を用いて答えよ.

問 B 空欄 に入る適切な式を, $\Delta E(p, x; L)$ と $\langle \rangle_\lambda$ を用いて答え, 式 (9) の不等式を証明せよ.

問 C 空欄 に入る適切な等号あるいは不等号を, 以下の選択肢から答えよ.

\geq , $=$, \leq

問 D 空欄 に入る適切な語句を, 以下の選択肢から答えよ.

ゼロ, 最小, 最大

問 E 空欄 に入る適切な式を, m , k_B , T , h , L を用いて答えよ.

問 F 空欄 に入る適切な式を, m , ω , L を用いて答えよ.

問 G 空欄 に入る適切な式を, m , k_B , T , ω を用いて答えよ.