［基礎科目（物理学）］

［問題］以下の文章を読み，問 A～H に答えよ．解答用紙には導出過程も記述すること．

図 1 のように，宇宙船が地球を中心とする円形の軌道に沿って運動している．簡単のため，太陽，月などの影響がないとする．地球の中心の原点 E により宇宙船の位置 S をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{ES}} = \boldsymbol{r}\ (|\boldsymbol{r}| = r)$ で表す．重力定数 G と地球質量 M_{E} を組み合わせた $\mu = GM_{\mathrm{E}}$ を用いて，質量 m の宇宙船に対して地球から引力は，

$$\boldsymbol{F}_G = -\frac{\mu m}{r^3}\boldsymbol{r} = -\frac{\mu m}{r^2}\mathbf{e}_r$$

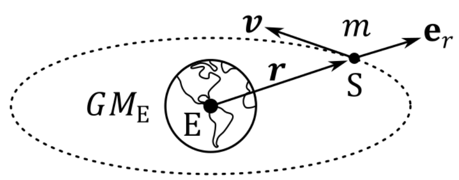

図 1　地球を回る宇宙船の軌道.

となる．宇宙船の接線速度を $\boldsymbol{v}\ (|\boldsymbol{v}| = v)$ とすると，遠心力は $\boldsymbol{F}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{r}) = \boxed{\quad ア \quad}$ と表される．宇宙船は地球の自転に合わせた r が一定の静止軌道にあるとすると，地球が一回転する時間 t_{E} を用いて r を表現すると，$r(t_{\mathrm{E}}) = \boxed{\quad イ \quad}$ となる．

次に宇宙船は加速した後，図 2 のように楕円形の軌道に移る．楕円の長軸が x軸と一致し，xy 平面内に運動しているとみなす．物理変数の時間微分について $\dot{\boldsymbol{r}} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ と $\ddot{\boldsymbol{r}} = \mathrm{d}^2\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t^2$ と書くと，運動方程式は，

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\mu m}{r^3}\boldsymbol{r}$$

で与えられる．ここで，$M_{\mathrm{E}} \gg m$ なので換算質量は m とおいた．また，θ は x 軸と動径方向のなす角とする．ここで平面の極座標系

$$\mathbf{e}_r = \quad \cos\theta\,\mathbf{e}_x + \sin\theta\,\mathbf{e}_y$$
$$\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\,\mathbf{e}_x + \cos\theta\,\mathbf{e}_y$$

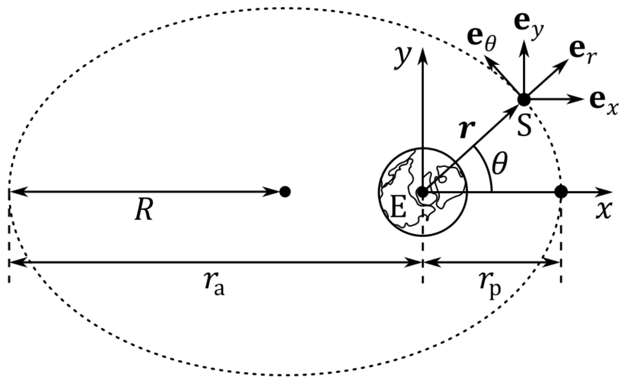

図 2　宇宙船の楕円形の軌道.

を導入する．$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ は $\boldsymbol{r}$ 方向，及び軌道平面内の $\boldsymbol{r}$ に垂直な単位ベクトルで，

$\mathbf{e}_x$，$\mathbf{e}_y$ は x 方向，及び y 方向の単位ベクトルである．$\mathbf{e}_r$，$\mathbf{e}_\theta$ の時間微分について $\dot{\mathbf{e}}_r = \boxed{\quad ウ \quad}$ と $\dot{\mathbf{e}}_\theta = \boxed{\quad エ \quad}$ の関係より，運動方程式が

$$\left(\ \boxed{\quad オ \quad}\ \right)\mathbf{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\mathbf{e}_\theta = 0 \tag{1}$$

に書き換えられる．この式により単位質量あたりの角運動量

$$h = r^2\dot{\theta} \tag{2}$$

が一定であることが分かる．さらに，微分の連鎖律から導かれる関係式

$$\ddot{r} = -h^2 s^2 \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}\theta^2} \qquad \left(s = \frac{1}{r}\right)$$

を用いると，次の微分方程式が得られる．

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}\theta^2} = \boxed{\quad カ \quad} \tag{3}$$

式(3)を解くことによって次の楕円軌道の公式が成り立つ．

$$r(\theta) = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1 + e\cos\theta} \tag{4}$$

e は軌道離心率として知られ，$e = Ah^2/\mu$（A は任意定数）である．図 2 に示す楕円の長軸半径 R を遠点距離 r_a と近点距離 r_p を用いて表すと，

$$R = \frac{r_\mathrm{a} + r_\mathrm{p}}{2} = \boxed{\quad キ \quad}$$

となる．

問 A　空欄 $\boxed{\quad ア \quad}$ に入る数式を m，v，r，$\mathbf{e}_r$ を用いて表せ．

問 B　空欄 $\boxed{\quad イ \quad}$ に入る数式を μ，t_E を用いて表せ．

問 C　空欄 $\boxed{\quad ウ \quad}$ 及び $\boxed{\quad エ \quad}$ に入る数式を θ，$\mathbf{e}_r$，$\mathbf{e}_\theta$ を用いて表せ．

問 D　空欄 $\boxed{\quad オ \quad}$ に入る数式を答えよ．

問 E　式(1)を用いて，式(2)の h が時間に対して一定であることを示せ．

問 F　空欄 $\boxed{\text{カ}}$ に入る数式を h, μ, s を用いて表せ.

問 G　式(3)の微分方程式を解くことにより式(4)を導出せよ.

問 H　空欄 $\boxed{\text{キ}}$ に入る数式を h, μ, e を用いて表せ.

物理学基礎問題　問題訂正

問題文６行目

（誤）「地球から引力は」
（正）「地球からの引力は $\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトル $\mathbf{e}_r$を用いて」