

## [基礎科目 (物理学)]

[問題] 以下の文章を読み，問 A~H に答えよ．

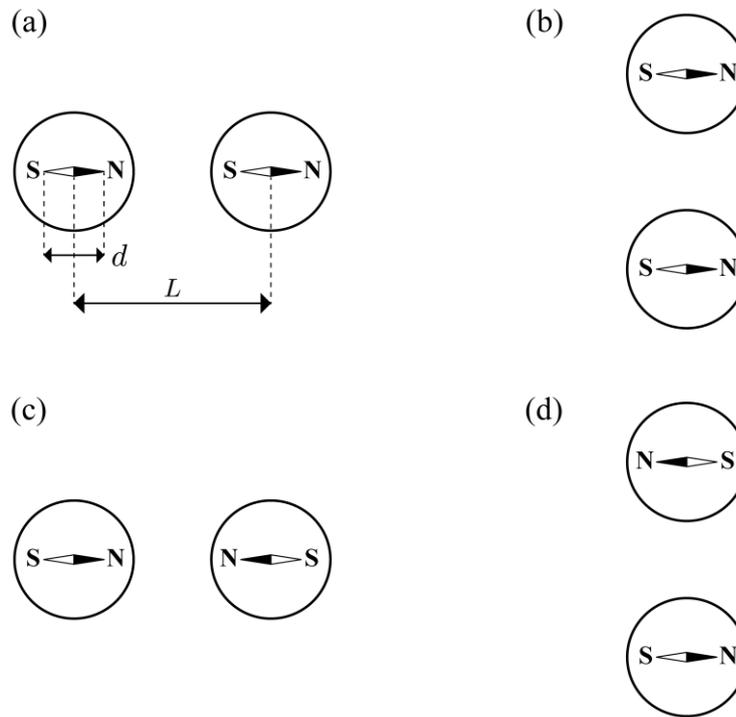


図 1 二つの方位磁針による四つの配置 (a) ~ (d)．

図 1 のように，外部磁場が無い真空中の平面上に距離  $L$  だけ離れて二つの方位磁針が置かれている．方位磁針の長さを  $d$  とし  $d \ll L$  であるとき，(a)~(d) の四つのうちどれが最も安定な状態であるか考える．

簡単のため，方位磁針を磁気双極子モーメントとみなすことにする．図 2 に示すように， $z$  軸上の点  $z = +d/2$  と  $-d/2$  に磁荷  $+q_m$  ( $q_m > 0$ ) と  $-q_m$  がそれぞれ固定されている状況を考える． $z$  軸原点を  $O$ ， $\overrightarrow{OA} = \mathbf{r}$  ( $|\mathbf{r}| = r$ ) とする．また，磁荷  $-q_m$  を始点とし磁荷  $+q_m$  を終点とするベクトルを  $\mathbf{d}$  ( $|\mathbf{d}| = d$ )，磁気双極子モーメントを  $\mathbf{p}_1 = q_m \mathbf{d}$  ( $|\mathbf{p}_1| = p_1$ ) と定義する．このとき，方位磁針の N 極は磁荷  $+q_m$  に，S 極は磁荷  $-q_m$  に対応する．

磁荷 $+q_m$ が点Aに作る静磁ポテンシャルは $q_m/(4\pi\mu_0 r_1)$ であるので、 $\mathbf{p}_1$ を構成する二つの磁荷が点Aに作る静磁ポテンシャルは

$$\phi(\mathbf{r}) = \boxed{\text{ア}} \quad (1)$$

となる。ただし、 $\mu_0$ は真空の透磁率、 $r_1$ と $r_2$ は磁荷 $+q_m$ と $-q_m$ から点Aまでの距離とする。

次に $\phi(\mathbf{r})$ の極座標表示を求める。 $\mathbf{r}$ が $\mathbf{d}$ となす角を $\theta$ とすると、図2中の $l_1$ と $l_2$

は $r$ 、 $\theta$ 、 $d$ を用いて $l_1 = \boxed{\text{イ}}$ 、

$l_2 = \boxed{\text{ウ}}$ と表せる。したがって、 $r_1$ と $r_2$ は $r$ 、 $\theta$ 、 $d$ を用いて $r_1 = \boxed{\text{エ}}$ 、

$r_2 = \boxed{\text{オ}}$ と表せる。これらの式を式(1)に代入することにより、極座標表示された静磁ポテンシャル $\phi(r, \theta)$ の表式を得ることができる。さらに、 $r \gg d$ という条件を用いることにより

$$\phi(r, \theta) = \frac{p_1}{4\pi\mu_0} \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (2)$$

と近似することができる。

式(2)を用いて、遠方における磁場 $\mathbf{H}(r, \theta)$ を求める。磁場と静磁ポテンシャルの関係

$$\mathbf{H}(r, \theta) = -\left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \phi(r, \theta) \quad (3)$$

を用いると、

$$\mathbf{H}(r, \theta) = \frac{p_1}{4\pi\mu_0 r^3} (\boxed{\text{カ}} \mathbf{e}_r + \boxed{\text{キ}} \mathbf{e}_\theta) \quad (4)$$

と表すことができる。ただし、 $\mathbf{e}_r$ は $\mathbf{r}$ と同方向の単位ベクトル、 $\mathbf{e}_\theta$ は紙面上にあり $\mathbf{e}_r$ と垂直な単位ベクトルとする。

ここまでで磁気双極子モーメント $\mathbf{p}_1$ が遠方に作る磁場 $\mathbf{H}$ を導出することがで

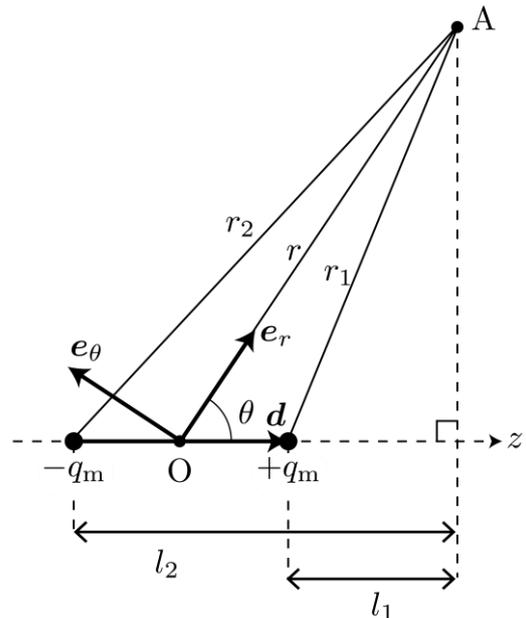


図2 磁気双極子モーメント

きた．点Aに新たな磁気双極子モーメント  $\mathbf{p}_2$  ( $|\mathbf{p}_2| = p_2$ ) を配置し， $\mathbf{p}_2$  が安定する向きを考える．一様な静磁場  $\mathbf{H}$  中における磁気双極子モーメント  $\mathbf{p}_2$  のポテンシャルエネルギーは  $U = -\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{H}$  で与えられる．図1の(a)または(c)の状態は， $\mathbf{p}_2$  が  $(r = L, \theta = 0)$  の位置に置かれている状態に相当する．このとき， の方がポテンシャルエネルギーが小さく，その値は

$$U = \text{} \quad (5)$$

である．一方，図1の(b)または(d)の状態は， $\mathbf{p}_2$  が  $(r = L, \theta = \pi/2)$  の位置に置かれている状態に相当する．このとき， の方がポテンシャルエネルギーが小さく，その値は

$$U = \text{} \quad (6)$$

である．式(5)，式(6)の結果より，離れて置かれた二つの方位磁針の状態は，図1(a)～(d)の中で  が最も安定であることがわかる．

問A 空欄  に入る数式を  $r_1$ ， $r_2$ ， $q_m$ ， $\mu_0$  を用いて表せ．

問B 空欄  および  に入る数式を答えよ．

問C 空欄  および  に入る数式を答えよ．

問D 式(2)を導出せよ．ただし， $|\beta| \ll 1$  のとき  $(1 + \beta)^\alpha \approx 1 + \alpha\beta$  が成り立つことを用いて良い．

問E 空欄  および  に入る数式を答えよ．

問F 空欄  に入る記号を(a)または(c)で答えよ．また，空欄  に入る数式を書け．

問G 空欄  に入る記号を(b)または(d)で答えよ．また，空欄  に入る数式を書け．

問H 空欄  に入る記号を(a)～(d)の中から選べ．