［基礎科目（物理学）］

［問題］以下の文章を読み，問 A～E に答えよ．解答用紙には導出過程も記述すること．

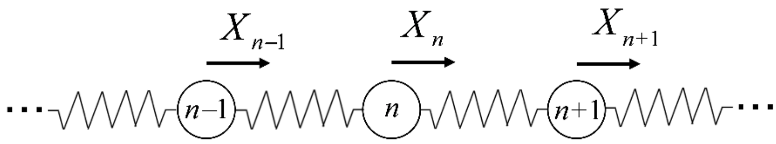

図 1 バネで連結された一種類の原子からなる 1 次元の格子

図 1 のように，1 次元軸上に同種原子がバネ定数kの調和型ポテンシャルで表されるバネで連なった 1 次元格子系を考える．各原子の質量はmとする．n番目の原子が平衡点からX_nだけそれぞれ変位したとすると，運動方程式は，

$$m\ddot{X}_n = -k(2X_n - X_{n+1} - X_{n-1})$$

となる．ここで，振動数ωと，各原子間の平衡時の長さを単位にした波数pを用いて表現した進行波

$$X_n = X_0\, e^{i(np-\omega t)} \tag{1}$$

は，この運動方程式を満たす．ここで振幅X_0は時間に依存しない定数である．これらより，pとωに関する関係式

$$\omega = \boxed{\quad ア \quad} \times \sin\frac{p}{2}$$

を得る．これを分散関係と呼ぶ．ただし，ωは正の実数で，$0 \leq p \leq 2\pi$とする．

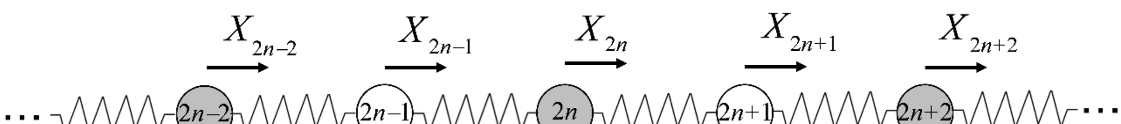

図 2 バネで連結された二種類の原子からなる 1 次元の格子

次に，図 2 のように質量M_{A}の原子 A（灰色）と質量M_{B}の原子 B（白色）が交互に並んだ 1 次元格子系を考える．調和型ポテンシャルのバネ定数kはすべて同じとする．偶数番目にある原子 A の運動方程式は，

$$M_{\mathrm{A}}\ddot{X}_{2n} = \boxed{\quad イ \quad}$$

奇数番目にある原子 B の運動方程式は,

$$M_{\mathrm{B}}\ddot{X}_{2n+1} = \boxed{\quad ウ \quad}$$

と書ける．ここで振動数ωを用いて $X_{2n} = X_{\mathrm{A}}e^{-i\omega t}$，$X_{2n-1} = X_{\mathrm{B}}e^{-i\omega t}$とおくと，振動数$\omega$と，各原子間の平衡時の長さを単位にした波数$p$を用いて，式(1)から

$$X_{2n+2} = X_{\mathrm{A}}e^{i(2p-\omega t)}$$

$$X_{2n+1} = X_{\mathrm{B}}e^{i(2p-\omega t)}$$

と書ける．ここで振幅X_{A}とX_{B}は時間に依存しない定数である．上記 4 つの変位に関する表式を原子 A と原子 B の運動方程式に代入することで, $\omega > 0$として,

$$\omega_{\pm} = \sqrt{k\left(\boxed{\quad エ \quad} \pm \boxed{\quad オ \quad}\right)} \tag{2}$$

を得る．すなわち，一つの波数pに対して二つのωが存在する．複号±のうち，正の符号のω_{+}において， pが十分に小さいとすると,

$$\omega_{+} = \boxed{\quad カ \quad}$$

となり，これを $\boxed{\quad \mathrm{I} \quad}$ 振動と呼ぶ．また，複号±のうち，負の符号のω_{-}において， pが十分に小さいとすると,

$$\omega_{-} = \boxed{\quad キ \quad}$$

となり，これを $\boxed{\quad \mathrm{II} \quad}$ 振動と呼ぶ.

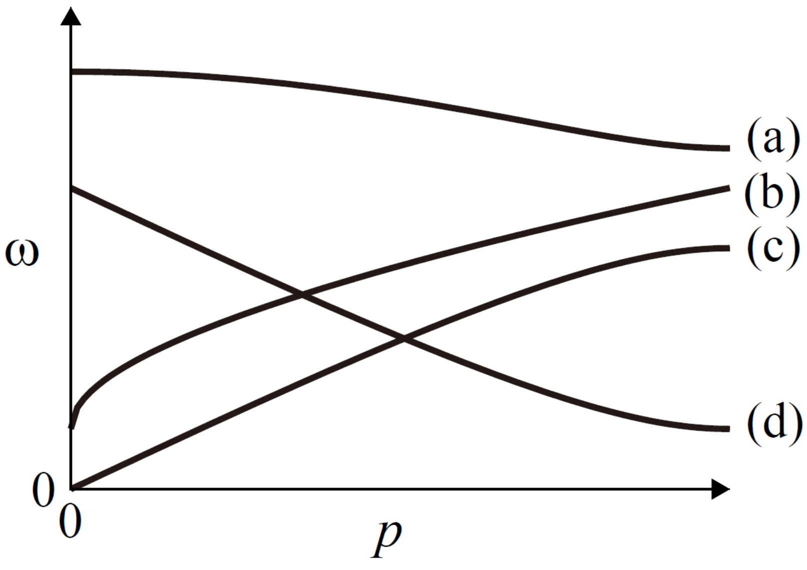

図 3 ωとpの分散関係

問 A　空欄 $\boxed{\text{ア}}$ に入る適切な数式を答えよ.

問 B　空欄 $\boxed{\text{イ}}$ ～ $\boxed{\text{オ}}$ に入る適切な数式を答えよ.

問 C　空欄 $\boxed{\text{カ}}$ 及び $\boxed{\text{キ}}$ に入る適切な数式を答えよ.

問 D　式(2)のω_+とω_-に相当する分散関係を図 3 の(a)～(d)から一つずつ選べ.

問 E　空欄 $\boxed{\text{I}}$ と $\boxed{\text{II}}$ に入る適切な語句を以下の中からそれぞれ一つずつ選択せよ.

減衰　　光学　　倍音　　非調和　　音響　　回転