[物理学II](全1題)

[問題1]

問1　一稜の長さが L の立方体の中にとじこめられた質量 m の質点の量子力学的固有状態の満たすシュレディンガー方程式および波動関数の満たすべき境界条件を書き下せ。

問2　上のエネルギー固有値問題を解け。

問3　エネルギー E の値が充分大きいときには、エネルギー固有値の値が E よりも小さい固有状態の数 $\Omega_0(E)$ は、$L^3=V$ として

$$\Omega_0(E)=\frac{4\pi}{3}\frac{V}{h^3}(2mE)^{3/2}$$

で与えられることを示せ。ここで h はプランク定数である。

問4　上の結果を用いて、エネルギーが E と $E+dE$ の間にある状態の数を $\Omega(E)dE$ としたときの $\Omega(E)$(状態密度関数)を求めよ。

問5　次にこの立方体に理想 Bose 粒子を N 個とじこめ、系の温度を T に保つ。この粒子の化学ポテンシャルを μ としたとき、エネルギー固有値が E_n である1つのエネルギー固有状態を占める粒子の数の期待値 $\bar{n}_n$ は、どのような公式で与えられえるか?

問6　理想 Bose 粒子は Bose-Einstein 凝縮という現象を示す。このとき N 個中のかなりの粒子 N_0 個が最低エネルギー状態に凝縮し、残りの N_1 個がエネルギー励起状態に分布する。N_1 は問4で求めた $\Omega(E)$ と問5の $\bar{n}_n$ から

$$N_1=V\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}F\left(-\frac{\mu}{kT}\right)$$

で与えられることを示せ。ただし、

$$F(\alpha)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{x^{1/2}dx}{e^{x+\alpha}-1}$$

は、$\alpha\geq 0$ の範囲でのみ有限の値を持つ単調減少関数であり、$F(0)\cong 2.612$ である。

従って N_1 は、

$$N_1\leq V\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}\times 2.612$$

を満たす。温度が低くなって右辺が N よりも小さくなると何が起こるか?起こる現象の様子をできるだけ詳しく調べよ。(化学ポテンシャル μ の値は何から決まるか。μ の値の温度依存性はどうなるか。N_0、N_1 の温度依存性は概略どうなるか。)