# ［専門科目（物理学）］（全２題）

［問題 1］以下の文章を読み，問 A〜C に答えよ．但し，解答用紙には結果だけではなく，計算過程も記述すること．

半径$R$の円周上に束縛された質量$m$の粒子の量子状態を考える（図 1）． 2 次元極座標表示における波動関数 $\phi(r,\theta)$ は $r=R$ においてのみ値を持つとして，$\phi(\theta)\equiv\phi(R,\theta)$ と偏角 $\theta$ のみの関数として表すことができる．エネルギー $\varepsilon$ に対する固有状態 $\phi(\theta)$ は，次の時間非依存のシュレディンガー方程式を満たす．

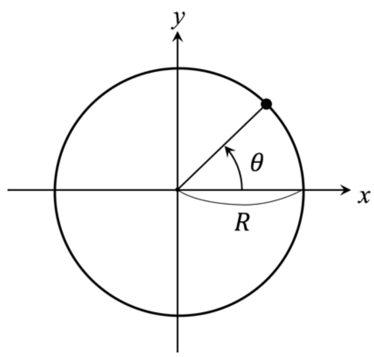

図 1

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi(\theta)=\varepsilon\phi(\theta)$$

但し $\hbar$ はプランク定数である. 2 次元極座標におけるラプラシアンは一般に $\nabla^2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ と書けるが，$r=R$と固定のもとでは$r$の偏微分は無視できるので $\nabla^2=\boxed{\text{ア}}$ としてよい．よって方程式の一般解は，任意定数 $c_1$，$c_2$を用いて $\phi(\theta)=c_1e^{i\lambda\theta}+c_2e^{-i\lambda\theta}$， $\lambda=\boxed{\text{イ}}$ と表すことができる．さらに境界条件 $\phi(\theta)=\phi\left(\boxed{\text{ウ}}\right)$ は $\lambda=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$ のときのみ満たされるから, 互いに直交する固有状態として

$$\phi_n(\theta)=Ne^{in\theta},\quad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

が得られる．このときの規格化因子は $N=\boxed{\text{エ}}$ である．また，$\phi_n(\theta)$ の固有エネルギーは $\varepsilon_n=\boxed{\text{オ}}$ となる．さらに時間依存のシュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi(\theta,t)=i\hbar\frac{d}{dt}\phi(\theta,t)$$

から波動関数の時間発展を考えると, 固有状態 $\phi_n(\theta)$ は紙面上方から見て $n>0$ のとき $\boxed{\text{カ}}$ 回り，$n<0$ のとき $\boxed{\text{キ}}$ 回りの進行波であることが分かる．

問 A　空欄 $\boxed{\text{ア}}$ 〜 $\boxed{\text{オ}}$ に入る適切な式を記せ．

問 B　空欄 $\boxed{\text{カ}}$ ， $\boxed{\text{キ}}$ に適切な語句をその理由とともに記せ．

問 C　相互作用のない粒子を一つ加えた 2 粒子系の波動関数$\Phi(\theta_1,\theta_2)$について，次の(i), (ii)に答えよ．但し，粒子の性質から波動関数は $\Phi(\theta_1,\theta_2) = \Phi(\theta_2,\theta_1)$ のように座標の交換に対して対称性を満たすものとする．

(i)　基底状態 $\Phi_0(\theta_1,\theta_2)$と，その固有エネルギー $E_0$ を，1 粒子系の固有状態 $\phi_n(\theta)$ と，固有エネルギー $\varepsilon_n$ $(n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$を用いてそれぞれ記せ．

(ii)　第一励起状態 $\Phi_1(\theta_1,\theta_2)$ と，その固有エネルギー $E_1$ を同様に記せ．但し，エネルギーの縮退がある場合は縮退する固有状態を全て記すこと．

［問題２］以下の文章を読み，問 A～E に答えよ．解答用紙には結果だけではなく，計算過程も記述すること．

図 1 に示したような，エネルギー差が $2\hbar\Omega$ の電子基底状態と電子励起状態を，それぞれエネルギー差 $\hbar\omega$ の調和振動子で記述する．ここで，$\hbar$ はプランク定数である．この時, 振動準位を除いた電子基底状態，電子励起状態のエネルギーを $E_g$，$E_e$ とする．

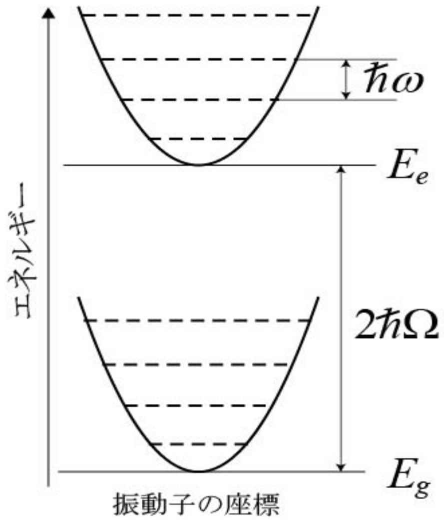


図 1　配置した振動子の系．破線は振動の固有状態を表す．

問 A　まず電子状態だけを考えよう．ハミルトニアンは行列形式で

$$H = \begin{bmatrix} E_e & V \\ V & E_g \end{bmatrix} \qquad (1)$$

と表される．ここで，$V$ は電子状態間の相互作用である．このハミルトニアンの固有値 $\lambda_+$ および $\lambda_-$ を求めよ．

問 B　$E_g = -\hbar\Omega$，$E_e = \hbar\Omega$，$V = \hbar\Delta$ とする．ここで，$\Delta$ は定数である．問 A で求めた固有値を用いて，逆温度 $\beta = 1/k_{\mathrm{B}}T$（ここで $T$ は温度，$k_{\mathrm{B}}$ はボルツマン定数）での電子状態の分配関数 $Z_E$，内部エネルギー $U_E = -\partial \ln(\mathrm{Z}_E)/\partial\beta$ を求めよ．　$\Omega' \equiv \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}$ とおいてよい．

電子励起状態の振動子は電子基底状態の振動子の直上に配置しているものとし，それぞれの振動子の固有関数はエルミート多項式で表されるとする．

よって，電子基底状態の$n$番目の振動準位のエネルギーは,

$$E_g^n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) - \hbar\Omega \tag{2}$$

電子励起状態の$m$番目の振動準位のエネルギーは

$$E_e^m = \hbar\omega\left(m+\frac{1}{2}\right) + \hbar\Omega \tag{3}$$

で表される．ここで，$n$，$m$は$n, m \geq 0$の整数である．

問 C　電子基底振動状態と電子励起振動状態が相互作用 $V = \hbar\Delta$ で結びついている．$\Delta$が振動座標によらない定数とすると，電子基底状態の$n$番目の振動状態からは，電子励起状態の$m = n$の振動状態にしか遷移がおきない．その理由を電子基底，励起状態の調和振動子の固有値と固有関数に基づき 100 字以下で記せ．

問 D　$E_g^n$と$E_e^n$の間の遷移に対するハミルトニアンは

$$H^{nn} = \hbar\begin{bmatrix} \omega\left(n+\frac{1}{2}\right)+\Omega & \Delta \\ \Delta & \omega\left(n+\frac{1}{2}\right)-\Omega \end{bmatrix} \tag{4}$$

で表される．この遷移に対する固有値 $\lambda_+^{nn}$および $\lambda_-^{nn}$を求めよ．

問 E　問 D の結果を基に全体の分配関数 $Z_{\mathrm{tot}}$，内部エネルギー $U_{\mathrm{tot}}$ を逆温度$\beta$に対して求めよ．