［基礎科目（物理学）］

［問題 1］以下の文章を読み，問 A～D に答えよ．

ボーアの原子模型に基づき，水素原子のエネルギーと磁性を考察する．以下では簡単のために，座標原点に固定された電荷 $+e$ の陽子の周りを質量 m，電荷 $-e$，スピン 1/2 の電子が x, y 面内で円運動しているとみなす（図 1）．単位系として SI 国際単位系を用い，真空の誘電率を ε_0，プランク定数を h とする．また，物理変数の時間微分については $\dot{A} = dA/dt$，$\ddot{A} = d^2A/dt^2$ のようにニュートン流の略号を用いる．ここで r は原点からの距離，θ は x 軸と動径方向のなす角とする．

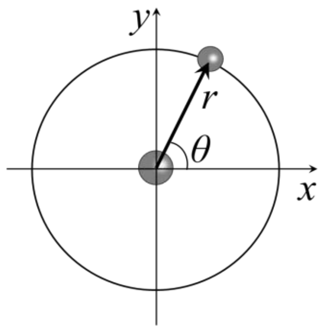

図 1 ボーアの原子模型

電子の軌道運動を記述する平面極座標と直交座標には以下の関係が成立する．

$$x = \boxed{\text{ア}}\ , \qquad y = \boxed{\text{イ}}$$

さらに，これらの時間微分について以下の関係が成立し，

$$\begin{cases} \dot{x} = \boxed{\text{ウ}}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = \boxed{\text{ウ}}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{x} = \boxed{\text{エ}}\cos\theta - \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\sin\theta \\ \ddot{y} = \boxed{\text{エ}}\sin\theta + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\cos\theta \end{cases}$$

r 方向の速度 v_r，加速度 a_r，及び θ 方向の速度 v_θ，加速度 a_θ は

$$\begin{cases} v_r = \boxed{\text{ウ}} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_r = \boxed{\text{エ}} \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) \end{cases}$$

で与えられる．r 方向，及び θ 方向についてのニュートンの運動方程式は次式で与えられる．

$$ma_r = \boxed{\text{I}} \qquad (1)$$

$$ma_\theta = \boxed{\text{II}} \qquad (2)$$

ここで，円運動において電子の物質波が定在波となる条件として，電子のド・ブロイ波長 λ と円運動の半径 r の間には，正の整数 n を用いて

$$2\pi r = n\lambda \qquad (3)$$

の関係が成立する．さらにθ方向の運動量$p_\theta = mv_\theta = mr\dot{\theta}$とド・ブロイ波長の間の関係式$\lambda = h/p_\theta$を用いると，式(3)は軌道角運動量$J = mr^2\dot{\theta}$の量子化条件

$$J = mr^2\dot{\theta} = \boxed{\text{オ}} \times n \tag{4}$$

を与える．これにより，正の整数 n が円運動に関する軌道角運動量の量子数であること，及び式(4)を満たす運動は運動方程式(2)の解であることも分かる．

問 A　上記の文中の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{オ}}$ に入る適切な数式を答えよ．また，空欄 $\boxed{\text{I}}$，$\boxed{\text{II}}$ に入る適切な数，あるいは数式を以下から選択して答えよ．

$$\left[\ 0,\ -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0},\ -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r},\ -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2},\ -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3},\ -\frac{e^2 r}{4\pi\varepsilon_0}\ \right]$$

問 B　式(1)および式(4)より，第n番目の定在波（$\dot{r} = \ddot{r} = 0$）における電子の半径rが，ボーア半径$a_0 \equiv \varepsilon_0 h^2/(\pi m e^2)$を用いて$r_n = a_0 n^2$で与えられることを示せ．

問 C　円運動の第n番目の定在波における電子の全エネルギーが$E_n = -\dfrac{1}{n^2}\dfrac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}$で与えられることを示せ．

問 D　軌道磁気モーメントμは，磁気回転比γを係数として軌道角運動量Jと比例関係が成立する．以下の空欄 $\boxed{\text{カ}}$ ～ $\boxed{\text{コ}}$ に入る適切な数式を答えよ．

問 B，C の結果より，第n番目の定在波において電子は陽子の周りを速度$v_\theta = r\dot{\theta} = \boxed{\text{カ}}$，周期$T = 2\pi r/v_\theta = \boxed{\text{キ}}$で円運動している．したがって，電子は単位時間当たりに陽子の周りをT^{-1}周回るため，水素原子内の電流の大きさは$i = e/T$で与えられる．軌道磁気モーメントμは電流iが流れている円の面積πr^2に対して$\mu = \pi r^2 i = \boxed{\text{ク}}$で与えられ，磁気回転比は$\gamma = \mu/J = \boxed{\text{ケ}}$である．有限のエネルギーを持つ最低エネルギーの状態の軌道磁気モーメントは$\boxed{\text{コ}}$であり，ボーアの原子模型は，実際の水素原子の最低エネルギーの状態が，軌道磁気モーメントを持たないという事実と，矛盾した結論を与えていることが分かる．