［基礎科目 (物理学)］

［問題］イオンエンジンによるロケット推進について述べた以下の文章を読み，問 A～C に答えよ．

図１はイオンエンジンの模式図であり，多くの穴が開いた二枚の電極が真空中に平行に置かれている．電極に垂直な方向を x 軸とする１次元座標系を考え，陽極（$x=0$）の穴を通過したイオンは陰極（$x=l$）に向かって加速され，陰極の穴を通って推進剤としてロケットの外に噴射される．陽極，陰極の電位をそれぞれ 0，$-\phi_0$ とする．簡単のために両電極間の電場は一様とみなすと，電極間にイオンが存在しない場合，その大きさは $\boxed{\quad ア \quad}$ で与えられる（実際には穴の影響があるので，一様ではない）．

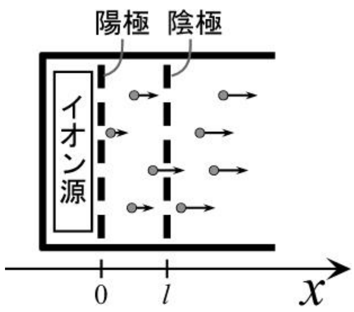

図１　イオンエンジンの模式図

電極の単位面積あたりのイオン電流密度 j に対する考察から，ロケットに働く推力の上限を求めよう．イオンの速度，単位面積あたりの空間電荷密度をそれぞれ $u(x)$，$\rho(x)$ とすると，

$$j=\rho(x)u(x) \tag{1}$$

が成り立つ．また ε_0 を真空の誘電率とすると，電位 $\phi(x)$ はポアソン方程式

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}=-\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0} \tag{2}$$

を満たす．さらに m，q をそれぞれイオンの質量，電荷とし，$x=0$ におけるイオンの速度を 0 とすると，$0\le x\le l$ の範囲でエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mu(x)^2+\boxed{\quad イ \quad}=0 \tag{3}$$

が成り立つ．式(1)～(3)より $u(x)$，$\rho(x)$ を消去することで，

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = -\frac{j}{\varepsilon_0}\left(\frac{m}{2q}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\phi(x)\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{4}$$

が導かれる．一方，①単位面積あたりのイオン電流密度 j が大きくなると，その空間電荷により陽極の位置での電位勾配が小さくなるため，j には上限 $j_{\max}$ が存在する．

問 A　文中の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ ，$\boxed{\text{イ}}$ に当てはまる数式を示せ．

問 B　式(4)の両辺に $2\dfrac{d\phi(x)}{dx}$ をかけ，さらに両辺を x で積分することで

$$\int dx 2\frac{d\phi(x)}{dx}\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = \int dx\left(-2\frac{d\phi(x)}{dx}\frac{j}{\varepsilon_0}\left(\frac{m}{2q}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\phi(x)\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{5}$$

が成り立つ．

(a) 任意の関数 $f(x)$ について成立する以下の等式の空欄 $\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまる数式を示せ．

$$2\frac{df(x)}{dx}\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\ \boxed{\text{ウ}}\ \right]$$

(b) 下線部①に関して，陽極の位置での電位勾配が 0，すなわち $\left.\dfrac{d\phi(x)}{dx}\right|_{x=0} = 0$ が $j_{\max}$ を与える条件である．これを初期条件として式(5)の積分を実行すると

$$\left(\frac{d\phi(x)}{dx}\right)^2 = \frac{4j_{\max}}{\varepsilon_0}\left(\frac{m}{2q}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\phi(x)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

が成り立つことを示せ．

問 C　(a) 式(6)より，イオン電流密度の上限 $j_{\max}$ を求めよ．計算過程も記述すること．

(b) 電極の単位面積あたりに働く推力 F は，

$$F = j\left(\frac{2m\phi_0}{q}\right)^{\frac{1}{2}}$$

により与えられる．単位面積あたりの推力の上限 $F_{\max}$ を，ε_0，ϕ_0，l を用いて示せ．