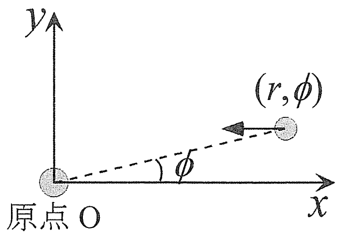
［基礎科目 (物理学)］

［問題］以下の文章を読み，問A〜Cに答えよ．



真空中の原点Oに電荷 Q の粒子をおく．この粒子がつくるクーロンポテンシャル下で，無限遠方から原点 O の近くに向かって飛行してくる質量 m，電荷 q の粒子の運動を，平面極座標 (r,ϕ) で考えよう．ただし原点Oにある粒子は，質量が m より十分に大きく原点Oから動かないものとする．また，飛行してくる粒子は無限遠方において x 軸の負の方向に初速度 v_0 で運動している．単位系としてSI（国際単位系）を用いることとし，真空の誘電率を ε_0 とする．

問A　直交座標と平面極座標とは

$$x = r\cos\phi\,,\quad y = r\sin\phi$$

なる関係により結び付けられる．飛行してくる粒子について，平面極座標における速度ベクトルの r，ϕ 成分（それぞれ v_r，v_ϕ とする）を以下の手順で求めよ．

(1) 直交座標における速度ベクトルの x, y 成分をそれぞれ v_x，v_y と表す．

このとき，下記の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ 〜 $\boxed{\text{エ}}$ を r，ϕ を用いた数式で表せ．

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial x}{\partial r}\dfrac{dr}{dt} + \dfrac{\partial x}{\partial \phi}\dfrac{d\phi}{dt} = \boxed{\text{ア}}\,\dfrac{dr}{dt} + \boxed{\text{イ}}\,\dfrac{d\phi}{dt} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial y}{\partial r}\dfrac{dr}{dt} + \dfrac{\partial y}{\partial \phi}\dfrac{d\phi}{dt} = \boxed{\text{ウ}}\,\dfrac{dr}{dt} + \boxed{\text{エ}}\,\dfrac{d\phi}{dt} \end{cases}$$

(2) 平面極座標と直交座標における速度ベクトルの各成分の間には

$$v_r = v_x\cos\phi + v_y\sin\phi\,,\quad v_\phi = -v_x\sin\phi + v_y\cos\phi$$

が成り立つ．この関係を用いて，v_r，v_ϕ がそれぞれ

$$v_r = \frac{dr}{dt}\,,\quad v_\phi = r\frac{d\phi}{dt}$$

と表されることを示せ．

問 B　飛行してくる粒子の運動方程式をϕ成分について立て，角運動量 $L = mr^2 \dfrac{d\phi}{dt}$ が保存量であることを示せ．ただし，平面極座標における加速度ベクトルのϕ成分は

$$a_\phi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{d\phi}{dt}\right)$$

で与えられ，またクーロンポテンシャルは r のみの関数でありϕには依存しないことを用いてよい．

問Ｃ　以下の手順により飛行してくる粒子の軌跡$r(\phi)$を求めよ．

(1) 飛行してくる粒子に対するエネルギー保存則は

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right] + \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

で与えられる．この式から t に関する微分を消去することで r のϕに関する一階の微分方程式を導き，以下の空欄 $\boxed{\text{オ}}$ ， $\boxed{\text{カ}}$ に当てはまる数式で示せ．

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2\left[\ \boxed{\text{オ}} + \boxed{\text{カ}}\ \right] + \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

ただし$\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{d\phi}{dt}\dfrac{dr}{d\phi}$， $L = mr^2\dfrac{d\phi}{dt}$ の関係を利用せよ．

(2) $r = \dfrac{1}{u}$ と変数変換することで，u のϕに関する一階の微分方程式に変形せよ．

(3) (2)の微分方程式の両辺をさらにϕで微分し，u のϕに関する二階の微分方程式を導き，以下の空欄 $\boxed{\text{キ}}$ に当てはまる数式で示せ．

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \boxed{\text{キ}}$$

また，この微分方程式の一般解を示せ．

(4) 飛行してくる粒子の入射方向を$\phi = 0$とする初期条件の下で，飛行してくる粒子の軌跡$r(\phi)$を求めよ．