[化学物理 I（基礎）] （全２題）

[問題 1]

半径 a の球形導体が真空中にある。この導体の無限遠での静電ポテンシャルを U_∞ とする。使用する単位系を明記して、以下の問いに答えなさい。なお、考え方や導出の過程も示すこと。

問A この球形導体に負電荷 $-Q$ を与えたときの静電ポテンシャル V を、球形導体の中心からの距離 r（$r>a$）の関数として表しなさい。なお、真空の誘電率は ε_0（$= 8.854 \times 10^{-12}$ F m^{-1}）である。

問B この球形導体の表面の電位を求めなさい。

問C この球形導体の静電容量 C を求めなさい。

問D この球形導体に少量の負電荷 $-q$ がたまっているとして、無限遠からさらに $-\mathrm{d}q$ だけの電荷を運び込むのに必要な仕事を求めなさい。

問E **問D**の仕事の総和として、電荷 $-Q$ が与えられたこの球形導体の静電エネルギー E を求めなさい。

問F 特殊相対性理論から導かれる物質のエネルギーE と質量 m との関係を式で表しなさい。

問G 球形導体と仮定した電子にも**問F**の関係が成立するとして、電子の半径を有効数字二桁で計算しなさい。なお、電子の電荷 e は 1.602×10^{-19} C、静止質量 m_e は 9.109×10^{-31} kg とする。

問H 球形導体と仮定した電子の、表面近くの電場の大きさを有効数字二桁で計算しなさい。

[問題 2]

１次元（x 軸とする）上を運動する質量 m の粒子を考える．この系に対する量子力学的ハミルトニアンは以下のように示される．

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \tag{1}$$

ここで，$V(x)$ は粒子の感じるポテンシャル，また，$\hbar = h/2\pi$ （h はプランク定数）である．式 (1) の $\hat{H}$ に対する固有状態 $\mid a >$ は全て既知とし，その固有値を E_a とする．今，$F_{ab} = (E_a - E_b) \mid < a \mid x \mid b > \mid^2$ と定義して $\sum_a F_{ab}$ なる和を考えると，定数になることを示したい．以下の問 **A**〜**D** に答えよ．

問 A. x と $\hat{H}$ の交換関係 $[x, \hat{H}] = x\hat{H} - \hat{H}x$ を求めよ．この結果を用いて，運動量の行列要素 $< a \mid p \mid b >$ を求めよ．

問 B. $< a \mid xp \mid a >, < a \mid px \mid a >$ を F_{ab} を用いて示せ．

問 C. $\sum_a F_{ab}$ の値を求めよ．

問 D. 調和振動子の場合（$V(x) = kx^2/2$）に，$\mid a >$ を基底状態として，**問 C** の結果を確認せよ．ただし，基底状態，第一励起状態の波動関数はそれぞれ，

$$\mid 0 >= \sqrt{\frac{1}{\pi^{1/2}\alpha}}\exp(-\frac{x^2}{2\alpha^2}), \quad \mid 1 >= \sqrt{\frac{1}{\pi^{1/2}\alpha^3}}x\exp(-\frac{x^2}{2\alpha^2}) \qquad \left(\alpha = (\frac{\hbar^2}{mk})^{1/4}\right)$$

と示される．また，次の恒等式を利用しても良い．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-Ax^2)dx = \sqrt{\pi/A} \qquad (A > 0)$$