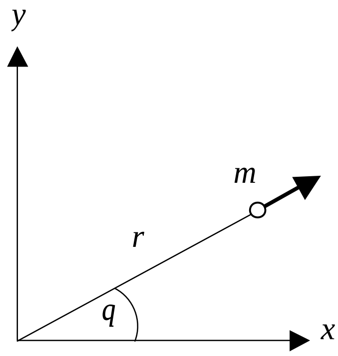
［化学物理Ⅰ（基礎）］（全２題）

［問題　1］



平面内で中心力場ポテンシャル$V(r)$中を運動する質量 m の質点の運動について以下の問いに答えよ．

問 A　この系の座標軸系で表現される速度$(\dot{x},\dot{y})$を極座標(r,q)とその速度$(\dot{r},\dot{q})$を用いて記せ．

問 B　問Aの結果を用いて，運動の全エネルギー E を V，(r,q)，$(\dot{r},\dot{q})$を用いて記せ．

問 C　座標軸系の運動方程式

$$m\ddot{x} = f_x$$
$$m\ddot{y} = f_y$$

［f_x と f_y はそれぞれ x 方向と y 方向にかかる力］

は，$(\dot{x},\dot{y})$それぞれの方向にかかる力から求める方法と，問Aの結果をさらに時間微分する方法で求める事ができる．それら二通りの式から，動径 r と方位角qの運動方程式［$m\ddot{r}=$の式と$m\ddot{q}=$の式］を(r,q)，$(\dot{r},\dot{q})$，加速度$(\ddot{r},\ddot{q})$と $V(r)$を用いて書け．

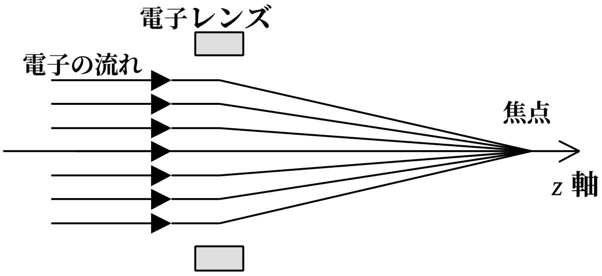
問 D　問Cの結果から，この系の角運動量 $L\ (= mr^2\dot{q})$ が時間に対して一定である事を示せ．

問 E　問Bの結果から，$E=0$であったとき，この質点の運動が円運動になるために必要なポテンシャル $V(r)$の関数形を m，r，L を用いて記せ．

問 F　ポテンシャル $V(r)$に対して質点が円運動をする時の条件は，「動径方向の運動エネルギーがある r で最大値をとり，その値が 0 であること」と書くことができる．問Eの場合は，極値を持たず常に 0 である特殊な場合を考えた．ここでは極値を持つ場合，$V=-k/r^3$ を考えよう．このときに上の条件を充たし，質点が回転運動をする時の回転半径 r とエネルギー E を求めよ．

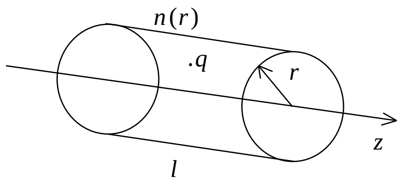
［問題　2］

電子レンズは，静電場を利用して電子線をその下流に収束させる装置である．しかし実際は電子間に働くクーロン反発のために，得られる電子密度には上限が存在する．つぎの文章を読み，以下の問いに答えよ．



一つの閉曲面内の総電荷が Q のとき，面要素 $d\vec{S}$ での電場 $\vec{E}$ をその閉曲面上で積分すると次式が成り立つ．ここで e_0 は真空の誘電率である（ガウスの定理）．

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{e_0}$$



この定理を，長さ l の円筒閉曲面に適用する．電子が数密度 $n(r)$ で z 軸対称に分布する場合，電場 $\vec{E}$ は動径方向への成分 $E(r)$ のみとなる．このときガウスの定理は，電子の電荷を q としてつぎのように書ける．

$$[\quad a \quad] E(r) = \frac{q}{e_0} \int_0^r [\quad b \quad] dr'$$

いま，質量 m 電荷 q の電子を z 軸から距離 r の位置に置くと，この電子は他の電子のつくる電場によって力を受け，動径方向の加速度 $\ddot{r}$ を生じる．

$$\ddot{r} = \frac{qE}{m} = [\quad c \quad] \int_0^r [\quad d \quad] dr'$$

電子は，時刻 t =0 に r =r_0 の位置にあり，動径方向に内向きの速度 $\dot{r} = -r_0 / t$ をもっていた．ここで r_0 と t はそれぞれ，長さと時間の次元をもつ定数である．時刻 t =Δt での電子の速度 $\dot{r}(\Delta t)$ は，微分の定義 $\ddot{r}(0)$ = $[\dot{r}(\Delta t)$-$\dot{r}(0)]/\Delta t$ からつぎのように書ける．

$$\dot{r}(\Delta t) = [\quad e \quad] + [\quad f \quad] \Delta t \qquad \cdots\cdots (1)$$

もしその電子以外に電荷がなければ，電子の運動は次式のように求められ，

$$r(t) = [\quad g \quad]$$

電子は時刻 $t = t$ で，z 軸を横切る事がわかる．一方電荷がある場合は，(1)式の第二項の積分を r_0 を微小量として $r = 0$ のまわりにテーラー展開し，ゼロにならない最初の項だけ残すことにより，(1)式を以下のように近似できる．ここで，数密度 $n(r)$ およびその微分 dn/dr は $r = 0$ で有限の値をもつものとする．

$$\dot{r}(\Delta t) \approx [\quad h \quad] r_0$$

この式で，内向きの速度と外向きの速度がつり合った場合，速度はゼロとなり，電子はそれ以上内側へ入ることができない．このときの密度 $n_{\max}(0)$を空間電荷効果による限界密度という．

$$n_{\max} = [\quad i \quad]$$

問 A　[a] ～ [i]にはいる適切な式を答えよ．

問 B　電位 V で加速された電子線が，時間 t のあいだに z 軸方向に距離 d だけ進んだ．この電子線に対して動径方向に内向きの速度を与えたが，z 軸方向に距離 d だけ進んだところで限界密度となった．限界密度に達するまでの時間Δt が走行時間 t に等しいとおいて，限界密度 $n_{\max}$ を V および d などを用いて表せ．

問 C　加速電位 70 V の電子線を 0.2 m 下流で収束させる場合，得られる電子の最大密度の大きさを，室温の真空容器内の残留ガス（1.0×10^{-6} Pa）の密度と比較し、簡潔に論ぜよ．必要ならば以下の定数を用いよ．真空の誘電率$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2\ N^{-1}\ m^{-2}}$，電子の電荷 $q = -1.60 \times 10^{-19}$ C，電子の静止質量 $m = 9.10 \times 10^{-31}$ kg.