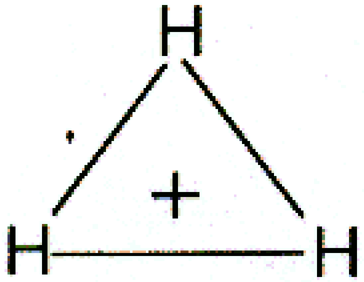
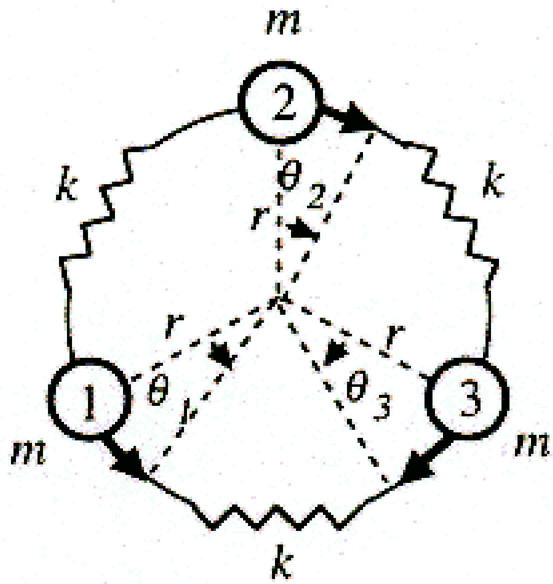
[化学物理Ⅱ（専門）]（全２題）

[問題１]

H_3^+の様な正三角形型の分子の微小振動運動を，バネで結ばれた剛体として古典的に考える．３つの質点（質量 m）は図のように半径 r の円周上にある等しいバネ（バネ定数 k）で連結されており，各質点はこの円周上のみを運動できるとする．以下の問いに答えよ．





問Ａ　３つの質点の平衡位置からのずれを円の中心からみた反時計回り方向のずれ角 θ_1, θ_2, θ_3 で記述する．ずれ角は十分小さいため，バネの位置エネルギーは半径 r の円周上の円弧の長さの変化の２乗にのみ依存するとする．このときのラグランジアンと θ_1, θ_2, θ_3 に関する運動方程式を求めよ．

問Ｂ　運動方程式を解き，固有振動数を求めよ．また、得られた最低基準振動に対応する運動を図示せよ．

［問題２］

光学活性な分子を含む溶液に直線偏光波が入射すると,電場ベクトルの方向が媒質を進むにつれ回転する. 以下の文章は、この現象をマクスウェル方程式を用いて考察したものである. 以下の空欄 $\boxed{\text{（ア）}}$ ～ $\boxed{\text{（カ）}}$ に適当な式をいれよ.

一般に、分子に時間変動する電場が加わると, 分子内に電流が誘起され磁気モーメントが生じる. 光学活性な分子を含む等方的溶液の場合には、溶液内の磁気モーメント密度が, その場所での電場の時間微分に比例する.

$$\vec{M} = g\left(\partial\vec{E}/\partial t\right) \tag{1}$$

溶液中に巨視的電流がないとすると, マクスウェル方程式は

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t\ , \qquad &&\vec{\nabla}\times\vec{H} = \partial\vec{D}/\partial t, \\ &\vec{H} = \left(\vec{B}/\mu_0\right) - \vec{M}\ , \qquad &&\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \end{aligned} \tag{2}$$

とかける. ここで ε および μ_0 は溶液の誘電率及び真空の透磁率, $\vec{D}$, $\vec{B}$ および $\vec{H}$ はそれぞれ電束密度, 磁束密度および磁場である. また $\vec{\nabla} = \vec{e}_X(\partial/\partial X) + \vec{e}_Y(\partial/\partial Y) + \vec{e}_Z(\partial/\partial Z)$ とする. ただし $(\vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z)$ は実験室座標系である.

(1)式と(2)式を組み合わせ電場のみの式を導くと

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) = \boxed{\text{（ア）}} \tag{3}$$

となる.

直線偏光波は左円偏光波と右円偏光波の重ね合わせで表すことができるので, まず, この媒質中を進行する円偏光波について調べよう. 周波数 ω で振動し Z 方向に進む左円偏光波と右円偏光波の電場ベクトルはそれぞれ次式の実部で与えられる.

$$\vec{E}_L(Z,t) = \left(\vec{e}_X + i\vec{e}_Y\right)E_L^0 e^{i(k_L Z - \omega t)} \tag{4}$$

$$\vec{E}_R(Z,t) = \left(\vec{e}_X - i\vec{e}_Y\right)E_R^0 e^{i(k_R Z - \omega t)} \tag{5}$$

これらの偏光波が

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}_L = \boxed{\text{（イ）}}\ \vec{E}_L \tag{6}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}_R = \boxed{\text{（ウ）}}\ \vec{E}_R \tag{7}$$

となる性質を持っていることに注意して(3)式を用いると，波数ベクトル k_L 及び k_R（ただし $k_L, k_R > 0$）は，

$$k_L = \boxed{\text{（エ）}} \tag{8}$$

$$k_R = \boxed{\text{（オ）}} \tag{9}$$

となる．

(4)式と(5)式の線形結合

$$\bar{E}(Z,t) = \left(\bar{e}_X + i\bar{e}_Y\right)E_0\, e^{i(k_L Z - \omega t)} + \left(\bar{e}_X - i\bar{e}_Y\right)E_0\, e^{i(k_R Z - \omega t)} \tag{10}$$

で与えられる電場ベクトルは，$Z = 0$ では常に X 方向に向いている．一方 $Z = Z_0$ では電場ベクトルの方向は時間によらず一定で進行方向からみて時計まわりに θ だけ回転している．ただし θ は k_L と k_R を用いて

$$\theta = \boxed{\text{（カ）}} \tag{11}$$

と書ける．