[物理学 II]（全１題）

[問題１]

磁性体のモデルとして、N 個の格子点を持つ結晶格子の各格子点上に１個のスピンが置かれたものを考える。各スピンは、同じ大きさの磁気モーメントを持ち、２つの向きだけをとるものとする（２つをそれぞれ、上向き、下向き、と呼ぶ）。また、隣接するスピンが互いに同じ方向を向くとき系のエネルギーは J だけ下がり、逆の方向を向くとき系のエネルギーは J だけ上がるものとする（ただし、$J>0$）。このことを式で表わすと、系のエネルギー E は、

$$E=-J\sum_{(i,j)}s_i s_j$$

と表わされる。ただし、s_i は i 番目のスピンの向きを表わし、$s_i=+1$ のときスピンは上向きで、$s_i=-1$ のときスピンは下向きである。また、$\sum_{(i,j)}$ は全ての隣接する格子点のペアについての和を表わす。以下に、上の E によって決まる系の自由エネルギーを近似的に考察する。

問A　N 個のスピンのうち N_+ 個が上向きで N_- 個が下向きであるときの自由エネルギーを求める。下の空欄を埋めよ。

N_+個の上向きスピンとN_-個の下向きスピンをN個の格子点上に配置する場合の数Wは（ア）で与えられる。そこで、エントロピーSが$S = k_B \ln W$で与えられる（ただし、k_Bはボルツマン定数）と考える。すると、スピンの分極mを$m = \dfrac{N_+ - N_-}{N}$として、Sはk_B、m、Nを用いて（イ）と表わされる。ここで、スターリングの公式$\ln N! = N\ln N - N$を使った。次に、隣接スピン対のうち、共に上向きであるものの個数をN_{++}、共に下向きであるものの個数をN_{--}、向きが違うものの個数をN_{+-}と書くと、$\sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j = N_{++} + N_{--} - N_{+-}$と書ける。$N_+$、$N_-$を与えても$N_{++}$、$N_{--}$、$N_{+-}$は様々な値をとりうるが、あるスピンに隣接するスピンのうち上向きおよび下向きであるものの割合がそれぞれ$\dfrac{N_+}{N}$、$\dfrac{N_-}{N}$であるとすると、隣接の格子点の数をzとして、N_{++}の平均は$\dfrac{1}{2} z N_+ \dfrac{N_+}{N} = \dfrac{z}{8} N(1+m)^2$で与えられる。同様の考えで、$N_{--}$、$N_{+-}$の平均を$z$、$N$、$m$を用いて表わすとそれぞれ（ウ）、（エ）となる。よって、平均のエネルギー$\overline{E}$は、J、z、N、mを用いて（オ）と表わされる。自由エネルギーFは、系の温度をTとすると、k_B、T、J、z、N、mを用いて（カ）と表わされる。自由エネルギーFをスピンの分極mの関数と考えるとき、mの平衡値Mを与える方程式は（キ）である。

問B　自由エネルギーFをスピンの分極mの関数として考える。このとき、ある転移温度T_cが存在し、その上下でFの挙動が変わる。この転移温度T_cを記し、$T < T_c$及び$T > T_c$においてFをmの関数として模式的に示せ。